

MATH-381

**Logique mathématique**

Duparc Jacques

Cursus	Sem.	Type
Mathématiques	BA5	Opt.

Langue d'enseignement	français
Crédits	5
Session	Hiver
Semestre	Automne
Examen	Ecrit
Charge	150h
Semaines	14
<b>Heures</b>	<b>4 hebdo</b>
Cours	2 hebdo
Exercices	2 hebdo
<b>Nombre de places</b>	

**Résumé**

Branche des mathématiques en lien avec le fondement des mathématiques et l'informatique théorique. Le cours est centré sur la logique du 1er ordre et l'articulation entre syntaxe et sémantique.

**Contenu**

Eléments de théorie naïve des ensembles. Ordinaux et cardinaux. Axiome du Choix, Lemme de Zorn et Théorème de Zermelo.

Calcul des Prédicats :

- Syntaxe : langage, formule et arbres de décomposition, variable libre vs liée, formule close, substitution.
  - Sémantique : structure et réalisation, sous-structure et restriction. Homomorphisme et isomorphisme. Interprétation et satisfaction. Jeu d'évaluation. Equivalence universelle et conséquence sémantique. Théorie, modèle et consistance. Système complet de connecteur, formes normales prénexes et forme de Skolem. Eléments de théorie des modèles. Théorème de compacité et modèle non standard.
  - Théorie de la démonstration : systèmes de Hilbert. Dédution naturelle et Calcul des Séquents. Logique classique vs logique intuitionniste. Elimination des coupures et propriété de la sous-formule. Théorème de complétude de la logique classique (Gödel). Modèle de Kripke et théorème de complétude de la logique intuitionniste.
- Eléments de théorie des modèles. Ultrapuissance et ultraproducts.

**Mots-clés**

Logique mathématique, logique du 1er ordre, syntaxe, sémantique, modèle, démonstration, fondement des mathématiques, conséquence, consistance, contradiction, théorie, formule, connecteur, terme, langage, complétude.

**Acquis de formation**

A la fin de ce cours l'étudiant doit être capable de:

- Evaluer une formule dans un modèle
- Formuler une hypothèse
- Interpréter une théorie
- Prouver de manière syntaxique
- Théoriser un concept mathématique
- Justifier les conséquences sémantique
- Construire des modèles
- Concevoir des démonstrations

**Méthode d'enseignement**

Cours ex cathedra et exercices

**Travail attendu**

- Participation aux cours
- Résolution des exercices

**Méthode d'évaluation**

Ecrit : 3 heures. Dans le cas de l'art. 3 al. 5 du Règlement de section, l'enseignant décide de la forme de l'examen qu'il communique aux étudiants concernés.

**Encadrement**

Office hours	Oui
Assistants	Oui
Forum électronique	Oui

**Ressources****Service de cours virtuels (VDI)**

Non

**Bibliographie**

- **Polycopié distribué en cours**

- **Introduction générale à la logique mathématique :**

1. René Cori, Daniel Lascar: Introduction à la logique mathématique, vol. 1 et 2, Dunod, 2003
2. Karim Nour, René David, Christophe Raffalli, et Pierre-Louis Curien: Introduction à la logique : Théorie de la démonstration, Dunod, 2004
3. H.-D. Ebbinghaus, J. Flum, and W. Thomas: Mathematical Logic, Springer, 1996
4. Wolfgang Rautenberg: A concise introduction to mathematical logic, Springer, 2006
5. Yu. I. Manin: A course in mathematical logic, Springer, 1977
6. Joseph R. Shoenfield: Mathematical Logic, AK Peters, 2001
7. Elliott Mendelson: Introduction to mathematical logic (4th edition), Chapman & Hall/CRC 1997
8. George Boolos, John Burgess, Richard Jeffrey: Computability and Logic (5th edition), Cambridge 2007
9. Herbert B. Enderton : A mathematical introduction to logic (2nd edition), 2000
10. Jon Barwise: Handbook of mathematical logic, North-Holland, 1982

- **Théorie des ensembles :**

1. Thomas Jech: Set theory, Springer 2006
2. Kenneth Kunen: Set theory, Springer, 1983
3. Jean-Louis Krivine: Theory des ensembles, 2007
4. Patrick Dehornoy: Logique et théorie des ensembles; Notes de cours, FIMFA ENS: <http://www.math.unicaen.fr/~dehornoy/surveys.html>
5. Yiannis Moschovakis: Notes on set theory, Springer 2006
6. Karel Hrbacek and Thomas Jech: Introduction to Set theory, (3d edition), 1999

- **Théorie des modèles :**

1. Bruno Poizat: Cours de Théorie des Modèles. Nur alMantiq walMa'arifah, Villeurbanne, 1985
2. Wilfrid Hodges: A shorter model theory, Cambridge 1999
3. Wilfrid Hodges: Model theory, Cambridge, 2008
4. David Marker : Model theory, an introduction, 2002
5. Philipp Rothmaler: Introduction to model theory, 2000

• **Théorie de la récursion :**

1. Piergiorgio Odifreddi: Classical recursion theory, vol. 1 and 2, Springer, 1999
2. Robert I. Soare: Recursively Enumerable Sets and Degrees, A Study of Computable Functions and Computably Generated Sets, Springer-Verlag 1987
3. Nigel Cutland: Computability, an introduction to recursive function theory, 1980
4. Raymond M. Smullyan: recursion theory for methamathematics, Oxford, 1993

• **Théorie de la démonstration :**

1. Wolfram Pohlers: Proof Theory, the first step into impredicativity, Springer, 2008
2. A. S. Troelstra, H. Schwichtenberg, and Anne S. Troelstra: Basic proof theory, Cambridge, 2000
3. S.R. Buss: Handbook of proof theory, Springer, 1998

• **Résultats de Gödel :**

1. Raymond M. Smullyan: Gödel's incompleteness theorems, Oxford, 1992
2. Peter Smith: An introduction to Gödel's theorems, Cambridge, 2008
3. Torkel Franzen: Inexhaustibility, a non exhaustive treatment, AK Peteres, 2002
4. Melvin Fitting: Incompleteness in the land of sets, King's College, 2007
5. Torkel Franzen: Gödel's theorem: an incomplete guide to its use and abuse, AK Peters, 2005

**Ressources en bibliothèque**

- [Introduction à la logique mathématique / Cori](#)
- [Introduction à la logique / Nour](#)
- [Mathematical Logic / Ebbinghaus](#)
- [A concise introduction to mathematical logic / Rautenberg](#)
- [Mathematical Logic / Shoenfield](#)
- [A shorter model theory / Hodges](#)
- [A mathematical introduction to logic / Enderton](#)
- [Gödel's incompleteness theorems / Smullyan](#)
- [A course in mathematical logic / Manin](#)
- [Set theory / Kunen](#)
- [Model theory / Hodges](#)
- [Introduction to model theory / Rothmaler](#)
- [An introduction to Gödel's theorems / Smith](#)
- [Incompleteness in the land of sets / Fitting](#)
- [Computability and Logic / Boolos](#)
- [Handbook of mathematical logic / Barwise](#)
- [Computability / Cutland](#)
- [Recursively Enumerable Sets and Degrees / Soare](#)
- [Basic proof theory / Troelstra](#)
- [Gödel's theorem / Franzen](#)
- [Logique et théorie des ensembles / Dehorny](#)
- [Classical recursion theory 2 / Odifreddi](#)
- [Model theory / Marker](#)
- [Inexhaustibility, a non exhaustive treatment / Franzen](#)

- [Proof Theory, the first step into impredicativity / Pohlers](#)
- [Introduction to Set theory / Hrbacek](#)
- [Handbook of proof theory / Buss](#)
- [Set theory / Jech](#)
- [Notes on set theory / Moschovakis](#)
- [Classical recursion theory 1 / Odifreddi](#)
- [Introduction to mathematical logic / Mendelson](#)
- [Théorie des ensembles / Krivine](#)
- [recursion theory for methamathematics / Smullyan](#)
- [Cours de Théorie des Modèles / Poizat](#)

### **Polycopiés**

Distribué pendant le cours.

### **Sites web**

- <http://www.hec.unil.ch/logique/>

### **Liens Moodle**

- <http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=14370>

### **Préparation pour**

- Set Theory
- Gödel and Recursivity